Будда 1. Занятие 2.

Класс: №№ 3755, 3755.2, 3756, 3759, 3761, 3765, 3777, 3779, 3783

№ 3755 Доказать, что интеграл $I = \int\limits^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$

ⓐ сходится равномерно на каждом сегменте $[a;b]$ не содержащем значения $\alpha = 0$;

ⓑ сходится неравномерно на каждом сегменте $[a;b]$, содержащем значение $\alpha = 0$.

В первом случае функция $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ монотонно стремится к нулю и равномерно относительно α. А первообразная

$$\int\limits_0^x \sin \alpha z \, dz = \frac{1}{\alpha}(1 - \cos \alpha x)$$

ограничена числом $\frac{2}{\min\{|a|,|b|\}}$. Значит, в силу признака Дирихле исходный интеграл сходится равномерно.

Во втором случае положим $z = \alpha x$, $\alpha > 0$ и $x \geq 0 \Rightarrow$

$$\int\limits_B^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \int\limits_{\alpha B}^{+\infty} \frac{\sin z}{z} dz$$

Отсюда для произвольного $B > 0$ существует $\alpha \in [a;b]$ такое, что

$$\left| \int\limits_B^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx \right| \geq \varepsilon_0, \text{ где } 0 < \varepsilon_0 \leq \int\limits_{0.1}^{+\infty} \frac{\sin z}{z} dz$$

Для этого достаточно взять $\alpha \leq \frac{0.1}{B}$

При $\alpha < 0$ все рассуждения проводятся аналогично лишь только $z = -\alpha x$. Вывод имеем тот же. Следовательно, исходный интеграл сходится неравномерно.

№3755.2 Исследовать на равномерную сходимость интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Рассмотрим произвольное $B = Const < 1$. Тогда

$$\int\limits_0^B \frac{dx}{x^\alpha} = \left. \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right|_0^B = \frac{B^{1-\alpha}}{1-\alpha} \longrightarrow +\infty \text{ при } \alpha \to 1$$

Это означает, что исходный интеграл сходится неравномерно.

№3756. Исследовать на равномерную сходимость интеграл:

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin x\,dx\ ,\quad 0<\alpha_0\le\alpha<+\infty.$$

Для функции $f(\alpha,x)=e^{-\alpha x}\sin x$ имеем оценку

$$|f(\alpha,x)|\le e^{-\alpha_0 x}$$

и несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha_0 x}dx=\frac{1}{\alpha}<\infty$ сходится.

Согласно признаку Вейерштрасса исходный интеграл сходится равномерно.

№3759 Исследовать на равномерную сходимость интеграл:

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x-\alpha)^2+1}\ ,\quad 0\le\alpha<+\infty$$

Для произвольного $B>0$ имеем:

$$\int_B^{+\infty}\frac{dx}{(x-\alpha)^2+1}=\left|x-\alpha=z\right|=\int_{B-\alpha}^{+\infty}\frac{dz}{z^2+1}=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}(B-\alpha).$$

Отсюда следует, что для $B>0$ существует α, сколь угодно близкое к B, что $\left|\int_B^{+\infty}\frac{dx}{(x-\alpha)^2+1}\right|>\varepsilon_0>0$.

Последнее означает что исходный интеграл сходится неравномерно.

№3761. Исследовать на равномерную сходимость интеграл

$$\int_1^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\cos x}{x^p}\,dx\ ,\quad 0\le\alpha<+\infty$$ и $p>0$ фиксировано.

Интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}dx$ сходится при $p>0$ по признаку Абеля–Дирихле сходимости несобственных интегралов. Функция $\varphi(\alpha,x)=e^{-\alpha x}$ монотонна и ограничена для $x\in[1;+\infty)$ и $\alpha\in[0;+\infty)$. Поэтому согласно признаку Абеля исходный интеграл сходится равномерно.

№3765. Исследовать на равномерную сходимость интеграл:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2}{1+x^p}\,dx\ ,\quad p\ge 0$$

Равномерная сходимость этого интеграла эквивалентна равномерной сходимости интеграла:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x^2}{x^p+1}\,dx$$

Имеем
$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1+x^p}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{x\sin x^2}{x(1+x^p)}\,dx = \int_1^{+\infty} f(x)\,\varphi(x,p)\,dx,$$

где $f(x) = x\sin x^2$ и $\varphi(x,p) = \dfrac{1}{x(1+x^p)}$.

Функция $f(x)$ имеет ограниченную первообразную:

$$\int_1^x z\sin z^2\,dz = -\frac{1}{2}\cos z^2\Big|_1^x = \frac{1}{2}(\cos 1 - \cos x^2) \Rightarrow$$

$$\left|\int_1^x z\sin z^2\,dz\right| \le 1.$$

Функция $\varphi(x,p)$ монотонно стремится к нулю и равномерно по p:

$$\varphi(x,p) \le \frac{1}{x} \quad \text{для } x\in[1,+\infty).$$

Поэтому в силу признака Дирихле исходный интеграл сходится равномерно.

№3779 Исследовать на непрерывность интеграл $F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{2+x^\alpha}$, $\alpha > 2$.

Подынтегральная функция $f(\alpha, x) = \frac{x}{2+x^\alpha}$ непрерывна при $x\in[0,+\infty)$ и $\alpha\in(2;+\infty)$. Значит функция $F(\alpha)$ будет непрерывной для $\alpha>2$, если интеграл $\int_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{2+x^\alpha}$ сходится равномерно при $\alpha>2$. Покажем, что это так.

Равномерная сходимость исходного интеграла эквивалентна равномерной сходимости интеграла

$$\int_1^{+\infty}\frac{x\,dx}{2+x^\alpha} \quad \text{при } \alpha>2. \qquad (1)$$

Имеем оценки $2+x^\alpha > x^\alpha \Rightarrow \frac{x}{2+x^\alpha} \le \frac{1}{x^{\alpha-1}}$. Тогда для $B>1$

$$\int_B^{+\infty}\frac{x\,dx}{2+x^\alpha} \le \int_B^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha-1}} = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{B^\alpha} \le \frac{1}{2B^2} \qquad (*)$$

Выберем произвольное $\varepsilon>0$ и число B так, чтобы $B > \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}$. Тогда из $(*)$ следует, что

$$\int_B^{+\infty}\frac{x\,dx}{2+x^\alpha} < \varepsilon \quad \text{для всех } \alpha>2.$$

Это означает равномерную сходимость интеграла (1).

№ 3777 Доказать, что интеграл $F(a)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-(x-a)^2}dx$ есть непрерывная функция параметра a.

Докажем непрерывность функции $F(a)$ на интервале $(-\infty;+\infty)$. Для этого достаточно показать равномерную сходимость несобственного интеграла $\int\limits_0^{+\infty} e^{-(x-a)^2}dx$ для $a\in(-\infty;+\infty)$. А для этого достаточно убедиться в равномерной сходимости этого интеграла для $|a|\leq L$, где L – произвольное положительное число. Имеем:

$$f(a,x)=e^{-(x-a)^2}\leq e^{-(x-L)^2}\cdot e^{L^2-a^2}\leq e^{L^2}\cdot e^{-(x-L)^2}.$$

Интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-(x-L)^2}dx$ сходится. Поэтому для произвольного $\varepsilon>0$ существует $B(\varepsilon)$, что $\int\limits_{B(\varepsilon)}^{+\infty} e^{-(x-L)^2}dx<\varepsilon e^{-L^2}$

А тогда $\int\limits_{B(\varepsilon)}^{+\infty} e^{-(x-a)^2}dx\leq e^{L^2}\int\limits_{B(\varepsilon)}^{+\infty} e^{-(x-L)^2}dx<\varepsilon$

Это означает равномерную сходимость исходного интеграла для $a\in(-\infty;+\infty)$.

3779 Исследовать на непрерывность функцию:

$$F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{2+x^\alpha}, \quad \alpha > 2.$$

Решение: можно показать, что этот интеграл сходится неравномерно в указанной области. Поэтому о непрерывности функции $F(\alpha)$ сказать пока что ничего нельзя.

Пусть $\alpha \geq 2+\varepsilon$, $\varepsilon > 0$. При $x \geq 1$:

$$\frac{x}{2+x^\alpha} \leq \frac{x}{2+x^{2+\varepsilon}}$$

Поскольку $\dfrac{x}{2+x^{2+\varepsilon}} \sim \dfrac{1}{x^{1+\varepsilon}}$ при $x \to +\infty$, то по признаку Вейерштрасса интеграл

$$\Phi(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{x\,dx}{2+x^\alpha}$$

сходится равномерно. Учитывая непрерывность подинтегральной функции, устанавливаем непрерывность функции $\Phi(\alpha)$ при $\alpha \geq 2+\varepsilon$, т.е. при $\alpha > 2$.

С другой стороны, функция

$$\Psi(\alpha) = \int_0^1 \frac{x\,dx}{2+x^\alpha}$$ — собственный интеграл, зависящий от параметра

непрерывна при $\alpha > 2$. Значит приходим к выводу, что $F(\alpha) = \Psi(\alpha) + \Phi(\alpha)$ также непрерывна при $\alpha > 2$.

Дано: №№ 3755.3, 3760.1, 3767, 3772, 3777.1, 3781.

№ 3755.3 Доказать, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^\alpha}$ сходится неравномерно в интервале $1 < \alpha < +\infty$.

Действительно, особая точка $x = +\infty$. Поэтому имеем эквивалентный по сходимости интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^\alpha}$, $1 < \alpha < +\infty$.

Для произвольного $B > 1$ имеем оценку

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^\alpha} \geq \frac{1}{2} \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

Последний интеграл сходится неравномерно для $1 < \alpha < +\infty$ (см. № 3755.1). Это означает, что и исходный интеграл также сходится неравномерно.

№ 3760.1 Исследовать на равномерную сходимость интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln^p x}{x\sqrt{x}}\, dx \quad \text{для } 0 \leq p \leq 10.$$

Сделаем замену переменных $z = \ln x \Rightarrow$

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln^p x}{x\sqrt{x}}\, dx = \int\limits_0^{+\infty} z^p e^{-\frac{1}{2}z}\, dz \quad \text{для } 0 \leq p \leq 10.$$

Равномерная сходимость этого интеграла эквивалентна сходимости следующего интеграла:

$$\int\limits_1^{+\infty} z^p e^{-\frac{1}{2}z}\, dz, \quad p \in [0; 10].$$

Подынтегральная функция $f(p, z) = z^p e^{-\frac{1}{2}z}$ допускает оценку

$$f(p, z) \leq z^{10} e^{-\frac{1}{2}z} \quad \text{для } p \in [0; 10] \text{ и } z \in [1; +\infty)$$

Интеграл $\int\limits^{+\infty} z^{10} e^{-\frac{z}{2}}\, dz$ сходится, так как функция $e^{-\frac{z}{2}}$ убывает при $z \to +\infty$ быстрее степени z^{10}. Тогда интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} z^p e^{-\frac{z}{2}}\, dz$$

сходится равномерно по признаку Вейерштрасса.

(3767) Исследовать на равномерную сходимость интеграл

$$\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \quad n \geq 0$$

Функция $\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}$ является непрерывной для $x \in [0;1)$ и $n \geq 0$. Кроме того при каждом n интеграл сходится.

$$\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ при } x \in [0;1) \text{ и } n \geq 0.$$

И интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$ сходится. Значит, по признаку Вейерштрасса исходный интеграл сходится равномерно.

№3757. Исследовать на равномерную сходимость интеграл

$$\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}dx \quad , 0 \le n < +\infty.$$

Сделаем замену переменной $z = 1-x \Rightarrow$

$$\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^1 \frac{(1-z)^n}{z^{\frac{1}{2}}(2-z)^{\frac{1}{2}}}dz.$$

Для всех $z \in [0;1]$ и $n \in [0;+\infty)$ имеет место оценка:

$$\frac{(1-z)^n}{z^{\frac{1}{2}}(2-z)^{\frac{1}{2}}} \le \frac{1}{z^{\frac{1}{2}}}.$$

Тогда для $B > 0$ $\int_0^B \frac{(1-z)^n}{z^{\frac{1}{2}}(2-z)^{\frac{1}{2}}}dz \le \int_0^B \frac{dz}{z^{\frac{1}{2}}} =$

$= 2B^{\frac{1}{2}} < \varepsilon \Rightarrow$ если по произвольному $\varepsilon > 0$ выбрать B, удовлетворяющим неравенству $B < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$, то $\int_0^B \frac{(1-z)^n}{z^{\frac{1}{2}}(2-z)^{\frac{1}{2}}}dz < \varepsilon$.

сразу для всех $n \in [0;\infty)$

Это означает равномерную сходимость исходного интеграла.

№3772. Законен ли переход к пределу под знаком интеграла в выражении

$$\lim_{\alpha \to +0} \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx.$$

Нет, не законен. Действительно, если это сделать, то

$$\lim_{\alpha \to +0} \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx = \int_0^{+\infty} \lim_{\alpha \to +0} \alpha e^{-\alpha x} dx = \int_0^{+\infty} 0\, dx = 0.$$

С другой стороны:

$$\lim_{\alpha \to +0} \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx = \left| z = \alpha x \right| = \lim_{\alpha \to +0} \int_0^{+\infty} e^{-z} dz = \lim_{\alpha \to +0} 1 = 1.$$

Это несовпадение результатов следует из того, что исходный интеграл сходится неравномерно. Действительно, для любого $B>0$

$$\int_B^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x}\,dx = \int_{\alpha B}^{+\infty} e^{-z}\,dz = e^{-\alpha B}$$

Для произвольного $B = \text{const} > 0$ существует $\alpha \to +0$ такое, что

$$e^{-\alpha B} \geq \varepsilon_0 = \frac{1}{2}.$$

№ 3777.1 Показать, что $F(\alpha) = \int_0^1 \frac{\sin\frac{\alpha}{x}}{x^\alpha}\,dx$ есть непрерывная функция в интервале $0<\alpha<1$.

Сделаем замену переменной $z = \frac{1}{x}$, $dx = -\frac{dz}{z^2}$

$$\int_0^1 \frac{\sin\frac{\alpha}{x}}{x^\alpha}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{\sin\alpha z}{z^{2-\alpha}}\,dz, \quad 0<\alpha<1.$$

Подынтегральная функция $f(\alpha, z) = \frac{\sin\alpha z}{z^{2-\alpha}}$ непрерывна для всех $z \in [1;+\infty)$ и $\alpha \in (0;1)$. Поэтому для непрерывности интеграла

$$F(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin\alpha z}{z^{2-\alpha}}\,dz, \quad 0<\alpha<1$$

достаточно равномерной сходимости этого интеграла относительно α. Для $0<\alpha\leq\alpha_0<1$, где α_0 – положительно и произвольно. Тогда

$$|f(\alpha, z)| \leq \frac{1}{z^{2-\alpha_0}}$$

и несобственный интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dz}{z^{2-\alpha_0}}$ сходится.

Тогда по признаку Вейерштрасса интеграл $F(\alpha)$ сходится равномерно для $0<\alpha\leq\alpha_0<1 \Rightarrow F(\alpha)$ непрерывна для этих $\alpha \Rightarrow F(\alpha)$ непрерывна на $(0;1)$.

№3781. Исследовать на непрерывность интеграл $F(\alpha) = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^\alpha(\pi - x)^\alpha}\,dx$, $0<\alpha<2$.

Нетрудно убедиться, что $F(\alpha) = 2\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha}\,dx$.

Пусть $0<\alpha\leq 2-\varepsilon<2, \forall\varepsilon>0$. Тогда разбиваем интеграл на части:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha}\,dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha}\,dx + \int_1^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha}\,dx.$$

Второй интеграл собственный, а его подынтегральная функция непрерывна на $x\in[1;\frac{\pi}{2}]$, $\alpha\in(0;2-\varepsilon]$. Тогда он есть непрерывная функция параметра α.

Для второго интеграла: $\frac{1}{(\pi-x)^\alpha} < 1$ при $x \in [0;1]$. $\Rightarrow$

$$0 < \frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha} < \frac{x}{x^\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha-1}}$$

Для $x \in (0;1)$ и $\alpha \leq 2-\varepsilon$ имеем неравенство

$$x^{\alpha-1} \geq x^{1-\varepsilon}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{x^{\alpha-1}} \leq \frac{1}{x^{1-\varepsilon}} \text{ и } 1-\varepsilon < 1 \text{ при } \varepsilon > 0.$$

Значит интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-\varepsilon}}$ сходится $\Rightarrow$ интеграл $\int_0^1 \frac{dx \cdot \sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha}$ сходится равномерно по признаку Вейерштрасса. $\Rightarrow$ $F(\alpha)$ непрерывная функция для $\alpha \in (0, 2-\varepsilon] \Rightarrow$ в силу произвольности $\varepsilon > 0$ имеем непрерывность $F(\alpha)$ для $\alpha \in (0;2)$.

3781 Исследовать на непрерывность функцию

$$F(\alpha)=\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin x}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\alpha}},\quad 0<\alpha<2.$$

Решение: Имеем

$$F(\alpha)=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\alpha}}dx+\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\frac{\sin x}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\alpha}}dx=2\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\alpha}}$$

Значит

$$F(\alpha)=2\int\limits_0^{1}\frac{\sin x}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\alpha}}+\underbrace{2\int\limits_1^{\pi/2}\frac{\sin x}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\alpha}}}$$

собственный интеграл, зависящий от параметра, подынтегральная функция является непрерывной. Значит

$$\Phi(\alpha)=2\int\limits_1^{\pi/2}\frac{\sin x}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\alpha}}dx$$ — непрерывная функция.

Для $\Psi(\alpha)=2\int\limits_0^{1}\frac{\sin x}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\alpha}}<2\int\limits_0^{1}\frac{\sin x}{x^{\alpha}}dx.$

Пусть $0<\alpha\leq 2-\varepsilon$, $\forall\varepsilon>0$. Тогда

$$2\int\limits_0^{1}\frac{\sin x}{x^{\alpha}}dx<\underbrace{2\int\limits_0^{1}\frac{dx}{x^{\varepsilon-1}}}$$

сходящийся интеграл

Согласно признаку Вейерштрасса интеграл $\int\limits_0^{1}\frac{\sin x}{x^{\alpha}}dx$ сходится равномерно при $0<\alpha\leq 2-\varepsilon$. Подынтегральная функция непрерывна. Поэтому $\Psi(\alpha)$ есть непрерывная функция при $0<\alpha\leq 2-\varepsilon$. Значит $F(\alpha)$ непрерывна при $0<\alpha\leq 2-\varepsilon$, $\forall\varepsilon>0$. Следовательно, аналогично справедливо при $0<\alpha<2$.

№ 3775 Доказать, что если:

1) $f(x,y) \rightrightarrows f(x,y_0)$ в каждом конечном $(a;b)$

2) $|f(x,y)| \leq F(x)$ и $\int\limits_a^{+\infty} F(x)dx < +\infty$,

то $$\lim_{y\to y_0}\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int\limits_a^{+\infty}\lim_{y\to y_0} f(x,y)dx.$$

<u>Доказательство</u>: Оценим по абсолютной величине разность: при $b>a$

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx - \int\limits_a^{+\infty} f(x,y_0)dx = \int\limits_a^{b}(f(x,y)-f(x,y_0))dx + \int\limits_b^{+\infty} f(x,y)dx - \int\limits_b^{+\infty} f(x,y_0)dx$$

Пусть $\varepsilon>0$ задано. В силу условие 2) при достаточно большом b справедливы оценки:

$$\left|\int\limits_b^{+\infty} f(x,y)dx\right| \leq \int\limits_b^{+\infty} F(x)dx < \frac{\varepsilon}{3}; \quad \left|\int\limits_b^{+\infty} f(x,y_0)dx\right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

а в силу условие 1) оценка выполняется:

$$|f(x,y)-f(x,y_0)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \text{ для } \forall x\in(a;b),$$

если разность $|y-y_0|$ достаточно мала.

Тогда имеем при достаточной близости y к y_0 неравенство

$$\left|\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx - \int\limits_a^{+\infty} f(x,y_0)dx\right| < \varepsilon.$$

Утверждение доказано.

№3776.1 Пусть $f(x)$ непрерывна и ограничена на $[0;+\infty)$. Тогда

$$\lim_{y\to\pm 0} \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{y f(x)}{x^2+y^2}dx = \pm f(0).$$

<u>Доказательство:</u> Положим $x = ty, t>0, y>0$. Тогда

$$\lim_{y\to\pm 0} \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{y f(x)}{x^2+y^2}dx = \lim_{y\to +0} \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{f(ty)}{t^2+1}dt$$

Так как $\frac{|f(ty)|}{t^2+1} \le \frac{M}{t^2+1}$, где $|f(ty)| \le M$, $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1} = \frac{\pi}{2}$

В силу непрерывности функции $f(ty)$ дробь $\frac{f(ty)}{t^2+1} \rightrightarrows \frac{f(0)}{t^2+1}$ при $y\to +0$ на каждом конечном интервале (a,b), то в силу №3775 получаем:

$$\lim_{y\to +0} \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{f(ty)}{t^2+1}dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \lim_{y\to +0}\frac{f(ty)}{1+t^2}dt = f(0).$$

В силу нечетности интеграла по переменной y и доказанного равенства, имеем

$$\lim_{y\to -0} \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{y f(x)}{x^2+y^2}dx = -f(0).$$

№3782 Исследовать на непрерывность функцию $F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{|\sin x|^{\alpha}}dx$, где $0<\alpha<1$.

<u>Решение:</u> Замена переменной x по формуле $x = \pi k + t$ в интеграле под знаком суммы

$$F(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\pi k}^{\pi+\pi k} \frac{e^{-x}}{|\sin x|^{\alpha}}dx,$$

преобразует данный интеграл к виду:

$$F(\alpha) = \frac{1}{1-e^{-\pi}}\int_0^{\pi} \frac{e^{-t}}{\sin^{\alpha} t}dt$$

Имеем неравенства

$$0<\frac{e^{-t}}{\sin^{\alpha}t}\le\left(\frac{\pi}{2t}\right)^{\alpha}\le\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1-\varepsilon}\cdot\frac{1}{t^{1-\varepsilon}},\ 0<t\le 1,\ 0<\varepsilon<\frac{1}{2}.$$

Тогда в силу признака Вейерштрасса, интеграл $\int\limits_0^1\frac{e^{-t}}{\sin^{\alpha}t}dt$ равномерно сходится на отрезке $[\varepsilon;1-\varepsilon]$.

Аналогично можно показать, что интеграл $\int\limits_{\pi-1}^{\pi}\frac{e^{-t}}{\sin^{\alpha}t}dt$ также равномерно сходится на этом отрезке. Кроме того, функция $\frac{e^{-t}}{\sin^{\alpha}t}$ непрерывна в области $0<t<\pi$, $0<\varepsilon\le\alpha\le1-\varepsilon$. Значит, функция $F(\alpha)$ непрерывна при $\alpha\in[\varepsilon;1-\varepsilon]$. В силу произвольности $\varepsilon>0$, эта функция непрерывна при $\alpha\in(0;1)$.

№3783 Исследовать на непрерывность функцию $F(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha^2x}dx$, $\alpha\in(-\infty;+\infty)$.

<u>Решение:</u> Для произвольных $l, L>0$ на области $0<l\le|\alpha|\le L<+\infty$ имеем оценку

$$|\alpha e^{-\alpha^2x}|\le Le^{-l^2x},\ x>0$$

По признаку Вейерштрасса интеграл $F(\alpha)$ сходится равномерно на области $|\alpha|\in[l;L]$. Значит, функция $F(\alpha)$ непрерывна на этом отрезке. В силу произвольности l и L функция $F(\alpha)$ непрерывна на области $\alpha\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

Отдельно изучим непрерывность $F(\alpha)$ при $\alpha=0$. С одной стороны, $F(0)=0$. С другой стороны, непосредственное интегрирование при $\alpha\neq0$ дает: $F(\alpha)=\frac{1}{\alpha}$. Значит, $\lim\limits_{\alpha\to\pm0}F(\alpha)=\pm\infty$. Поэтому при $\alpha=0$ непрерывности нет.

Таким образом, функция $F(\alpha)$ непрерывна всюду, кроме $\alpha=0$.